美和技術學院學報　第二十六卷第二期　民國九十六年
Journal of Meiho Institute of Technology, Vol.26 No.2 pp.31~46

完全預購商品供貨之最適訂價策略

蔡福建*

摘要

本研究係透過顧客對商品的需求率函數及顧客願意等待取貨的比率函數，來探討一個完全預購商店在缺貨期間之商品供貨的訂價策略問題，其中在缺貨期間之某時點的需求率函數是當時點之價格水準及價格變化率的線性函數。當顧客在缺貨期間之某時點進入一個完全預購的商店，且對當時點之價格水準與價格變化率之商品表明有需求意願時，他將會被告知必須等待一段時間之後才能取得該商品。此刻，顧客仍願意購買的比率是一個介於 0 與 1 之間的比率函數。如何建立一個可具體討論的數學模式並決定出在缺貨期間之每一個時點的最佳價格函數，才能使此完全預購商店之總利潤為最大，則為本研究的主要內容。本研究的結果顯示：在需求率函數假設為線性的假設條件下，完全預購商品之最佳價格函數依比率函數的型態而異；當比率函數為等待時間長度之指數函數型態時，最佳價格函數是一個與顧客預購商品之時點無關的常數函數；當比率函數假設為等待時間長度之線性函數型態時，最佳價格函數是顧客預購商品之時點的一個遞增函數。

關鍵字：完全缺貨、完全預購、數學模式、價格變化率、需求率函數

* 美和技術學院企業管理系專任講師

壹、 前言

自從基本 EOQ 模式在 1915 年由 Harris 與 Wilson 提出後，有關於最適供應量的探討，已經有很多不同的模式被提出來，這些模式大部份都是在基本的 EOQ 模式中，以放寬某些假設條件而衍生得到的(Maxwell & Muckstadt, 1985; Silver, 1981; Tinarelli, 1983)。將「不允許缺貨」放寬成「允許缺貨」的模式，在許多實務的存貨系統中是經常被發現的存貨問題。對於各種不同情況的允許缺貨，雖然可以建構出不同的數量供應模式；然而，過去在建構這類的模式時，有些是很單純地假設在缺貨期間的所有需求都是「來日交貨」的訂單或都是「永遠流失」；而有些是假設在缺貨期間的需求有一定的比率 b 是「來日交貨」的訂單，其餘的比率 $(1-b)$ 則是「永遠流失」，其中 $0<b<1$ (Caine & Plaut, 1976; Montgomery, Bazaraa & Keswani, 1973)。

很明顯地，以一個固定的比率 b 來描述顧客在缺貨期間的訂購行爲所建構出的模式是較具有彈性的；然而，Chen 與 Wu (1995)認爲這樣的處理程序仍是過於簡化的，且該假設必須要加以改進。他們認爲顧客在缺貨期間的訂購比率應爲「等待取貨之時間長度」的函數；當須等待取貨的時間長度愈長，顧客願意訂購的比率是會愈低的。因此，在他們所建構的模式中，將該固定的比率 b 改成 b_t ，來尋求完全缺貨期間之商品的最佳供應時機與供應量，其中 b_t 是取得該商品前所必須等待之時間長度的函數。

所謂「完全缺貨(complete stock-out)」係指當顧客發生訂購商品之行爲時，該商店完全沒有該類商品可資供應。Chen 與 Wu (1995)將在完全缺貨期間顧客對商品的訂購行爲，稱爲「完全預購(complete pre-ordered)」；而該類商品稱爲「完全預購商品(complete pre-ordered merchandise)」；販售該類商品的商店稱爲「完全預購商店(complete pre-ordered store)」。在他們所建構的模式中，一個完全預購的商店，它具有下列的特徵：

(1) 當一位顧客有意願在一家完全預購的商店購買一種商品時，供應者將會告知他，商品將會在往後的一些時間才能取得（即目前是缺貨）。
(2) 當一位顧客表明其需求意願時，想到該商品無法馬上取得，他會詢問取得該商品的時間（即必須等待多久）。
(3) 在考慮須等待取貨之時間長度後，顧客會決定是否購買該商品（即是否預購）。

在上述完全預購商店之特徵的假設中，基本上商品之售價水準與需求量在整個缺貨期間之每一個時點都是固定不變的。在售價水準是固定時，當一位顧客到達一個完全預購商店後，其是否願意訂購商品是僅與其所必須等待取貨的時間長度有關。顧客愈早訂購商品，其必須等待取貨的時間長度將會愈長；因此，其訂購商品的意願會愈低。然而，當價格水準不是固定的，而是可以隨著時間點的不同而不同，而且顧客訂購商品的時間點必須先於取得商品的時間點甚久時，顧客

訂購的意願除了與其所必須等待取貨的時間長度有關外，價格水準及顧客預期價格漲跌的心理因素，也將是一個不可忽視的考慮因素。這種將缺貨期間顧客對於商品之預期漲跌價因素納入製作各時點之最佳價格的數學模式中考慮，是本研究與上述相關文獻的主要不同特徵之一。

對於一個完全預購商店而言，爲了轉化顧客的消費者剩餘成爲商店的利潤，該商店對其所銷售的商品，可以在完全缺貨期間之不同的時點訂定出不同的價格水準。即廠商爲了吸引更多的顧客在缺貨期間訂購商品，可能會採取實質價格優惠或變相折價的贈品方式等行銷策略。很多的實例皆符合此種現象，如旅行社招攬旅遊團人數、補習班的招生策略、新籌設公司的成立、新建房屋的推出、雜誌的發行，以及具特殊習俗或季節性之需求商品等皆屬之。廠商爲了能做好數量的管控或銷售目標的達成，經常採取廣告預購的行銷策略；尤其是某些具有時效性的商品，如疫苗等；當進貨（或生產）過多或過少時，都將造成商家的損失。因此，廠商爲了累積銷售數量或籌募基金，經常以這種方式的行銷策略來誘以顧客提早訂購商品，以達到公司利潤的預期目標。針對此種方式的行銷策略，一般廠商之決策常是以二分法的方式來處理：即在某臨界點（時間點或數量總數）之前訂購，將給於某固定的優惠，而在該臨界點之後訂購就不再給予該優惠。這種優惠方式對於提高顧客訂購商品之意願是有幫助的，但常會因其在臨界點前後之完全不同待遇而引起一些不必要的紛爭，而且該臨界點的決定仍值得討論。在此，我們將考慮一種連續的價格函數，它是顧客在缺貨期間到達商店表明其需求並訂購商品之時點的函數。

依據靜態需求函數的假設，當價格水準較低時，顧客會增加其訂購商品的意願。然而，當價格水準爲時間的函數時，價格將隨時間的變化而變動；因此，某時點的價格水準及價格變化率將會同時影響顧客對商品的需求意願。在 Chen 與 Chen (1998,1999)的文章中曾論述：當價格隨時間變動時，顧客對於商品在其心中的內在參考價格(IRP, internal reference price)也會隨著調整；即市場上任一個時點之成交價格的傳播，會影響消費者預期的內在參考價格。在當時點的價格水準可能稍高，但由於價格的變動，當預期價格水準會上升時，顧客對於該商品的內在參考價格也將會提高，因而顧客會覺得當時點之價格水準合宜而採取購買的行爲；反之，在當時點的價格水準合宜，但由於價格的變動，當預期價格水準會下降時，顧客對於該商品的內在參考價格也將會降低，因而顧客會覺得當時點之價格水準稍高而採取觀望不購買的行爲。因此，他們視潛在顧客對於商品價格之預期漲跌爲決定價格的重要因素。此外，完全預購商品的特徵是，顧客無法於訂購商品後立即獲得取得該商品所帶來的滿足感，且在缺貨期間顧客對商品之價格的期待心理不一。因此，當完全預購商品在不同時點訂定不同的價格水準時，顧客的購買行爲除了受當時點之價格水準影響外，亦與當時點之價格變化率有關。在此，我們考慮一個同時與顧客訂購商品之時點的價格水準及價格變化率有關的需求函數，用來描述顧客在當時點對商品的潛在需求率（此時之需求率已不再只是價格水準的函數）。

本研究主要是聚焦在：顧客於完全缺貨期間之某時點對於完全預購商品的訂購意願是同時受當時點之「價格水準及價格變化率」與「取得商品前所必須等待的時間長度」之交互影響後的決策問題。此外，在本研究中所考慮的商品供貨時點是確定的，即完全預購商店是在某一個固定時點供應貨品，而在供貨之前的缺貨期間則是完全接受預購。因此，一個完全預購商店對於其商品如何訂定出在缺貨期間之每一時點的價格水準函數，才能使該商品在此給定的缺貨區間內被預購的總利潤為最大，則為本研究的主要目的。

基於上述的假設與目的，本研究建構出一個可以具體討論的數學模式，並尋求各時點的最佳價格函數；同時，進一步探討此最佳價格函數的特徵。

貳、 符號與假設

本研究是一個在供貨時點確定後之完全預購商品的訂價策略問題；所使用的參數及決策變數之符號、定義與假設條件如下：

$p(t)$ ：顧客在缺貨期間之時點 t 預購商品時，該商品的售價水準；它是完全預購商店利潤最大化的決策函數。

$p'(t)$ ：在時點 t 之商品的價格變化率。

價格變化率 $p'(t)$ 的正負符號是描述著時點 t 的價格水準是由前一個時點的價格水準上升或下降的變化情形；然而，這兩種情況對於潛在顧客的心理感受是不同的。當 $p'(t) > 0$ 時，則顧客對於該商品的價格會有預期漲價的心理；而當 $p'(t) < 0$ 時，則顧客對於該商品的價格會有預期跌價的心理。

T ：完全預購商品的供貨時點，它是一個已知的常數。

顧客之預購行為是發生在時間區間 $(0, T]$ 內的任意時點，且完全預購商店的供貨行為是發生在 T 時點。即如果顧客之預購行為是發生在該時間區間內的某時點 t ，則該顧客必須等待 $T-t$ 的時間長度，才能取得該商品。

c ：單位成本；批量購入商品時，每單位商品的購入成本。

本研究假設顧客在缺貨期間 $(0, T]$ 內某時點 t 對商品之潛在需求率是同時與當時點之商品的價格水準 $p(t)$ 及價格變化率 $p'(t)$ 有關。在時點 t 之商品的售價水準 $p(t)$ 愈大時，顧客對商品的需求率愈低；此外，由於本研究為完全缺貨商品，其價格資訊在買賣雙方是處於一種資訊不對稱的狀態；賣方可以完全掌控，而買方僅能根據在擬預購之時點的鄰近資訊作判斷；因此，潛在顧客對於商品在時點 t 之價格變化率 $p'(t)$ 為正值或負值，會產生預期漲價或跌價的心理而導致需求率增加或減少(Chen & Chen, 1998, 1999)。因此，本研究假設顧客在時點 t 對預購商品的潛在需求率函數 $D(p(t), p'(t))$ 具有下列的性質：

$$\frac{\partial D(p(t), p'(t))}{\partial p(t)} < 0 \text{ 且 } \frac{\partial D(p(t), p'(t))}{\partial p'(t)} > 0 \qquad (2.1)$$

其中當 $p(t)\equiv c$ 時，不等式 $D(c,0)>0$ 恒成立（即當訂價決策者恒用成本價 c 銷售商品時，其需求率爲正）。以下本研究假設在時點 t 之潛在需求率函數 $D(p(t),p'(t))$ 爲當時點之價格水準 $p(t)$ 及價格變化率 $p'(t)$ 的線性函數，如下：

$$D(p(t),p'(t))=A_1-A_2p(t)+A_3p'(t) \tag{2.2}$$

其中 A_1,A_2,A_3 均爲正數，且 $A_1-cA_2=D(c,0)>0$ 。

上述之需求率函數是在忽略「延遲取得商品」這項因素下所考慮的。當顧客在時間區間 $(0,T]$ 內的某時點 t 進到完全預購商店，對當時點的價格水準及價格變化率考慮其需求意願時，則他將被告知必須等待 $T-t$ 的時間長度，且在時點 T 才能取得該商品。此時，有些顧客認爲該等待的時間長度太長了，因而放棄預購；而某些其他的顧客可能認爲該等待的時間長度仍可接受。在本研究中，我們使用符號 $\theta(T-t)$ 來表示顧客在時間區間 $(0,T]$ 內之某時點 t 進到完全預購商店並表明其需求意願時，於考慮須等待取貨之時間長度 $T-t$ 後，仍願意訂購該商品的比率函數。一般而言，當等待取貨的時間長度 $T-t$ 增加時，願意訂購的比率會減小，即 $\theta(T-t)$ 爲 $T-t$ 的減函數，且滿足

$$0\le\theta(T-t)\le 1,\ \ \forall\, t\in[0,T],\theta(0)=1 \tag{2.3}$$

基於上述的假設，當潛在顧客在時間區間 $(0,T]$ 內之某時點 t 進到一個完全預購的商店時，完全預購商店之商品的被訂購率是同時受顧客在時點 t 對該商品的潛在需求率函數 $D(p(t),p'(t))$ 與取得該商品前願意等待的比率函數 $\theta(T-t)$ 之影響。本研究假設完全預購商店之商品在時點 t 的被訂購率爲 $Q(t)$ ，其中 $Q(t)=\theta(T-t)\cdot D(p(t),p'(t))$ 。

參、 模式的建構與求解

一、 模式的建構

假設顧客在時點 t 訂購商品後不再退訂，則基於上節的符號意義與基本假設可以得到：完全預購商店在時間區間 $[0,T]$ 內之商品被預購的總收入爲

$$\int_0^T p(t)\cdot\theta(T-t)\cdot D(p(t),p'(t))\,dt \tag{3.1}$$

且總成本爲

$$c\cdot\int_0^T\theta(T-t)\cdot D(p(t),p'(t))\,dt \tag{3.2}$$

如果供貨決策者的目標爲：如何決定出預購商品在完全缺貨期間之每一個時點的最佳價格函數，以尋求在時間區間 $[0,T]$ 內之總利潤爲最大。則由(3.1)式與(3.2)式可得，完全預購商店在時間區間 $[0,T]$ 內之總利潤最大化的數學模式如下：

$$\underset{p}{Max}\ \int_0^T\big(p(t)-c\big)\cdot\theta(T-t)\cdot D(p(t),p'(t))\,dt \tag{3.3}$$

模式中 p 爲 t 的函數。

二、 模式的求解

假設**模式(3.3)**的最佳解存在，且令 $p^*(t)$ 爲該模式的最佳解， $0 \le t \le T$ 。因爲在**模式(3.3)**中之被積分函數爲 t 、 $p(t)$ 及 $p'(t)$ 的函數，這是一個變分法問題；因此，由變分法中之尤拉方程式（Euler equation）(Kamien & Schwartz, 1991)可知， $p^*(t)$ 必在時間區間 $[0\,,T]$ 內滿足下列的必要條件：

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(p(t)-c\right)\cdot\theta(T-t)\cdot\frac{\partial}{\partial\, p'(t)}D(p(t),p'(t))\right\}$$

$$=\theta(T-t)\cdot\left\{D(p(t),p'(t))+\left(p(t)-c\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\, p(t)}D(p(t),p'(t))\right\} \tag{3.4}$$

首先，爲了具體化(3.4)式的求解，我們利用(2.2)式之潛在需求率函數，可將(3.4)式簡化如下：

$$\frac{d}{dt}\left\{\,\theta(T-t)\cdot\left(A_3\cdot p(t)-cA_3\right)\right\}=\theta(T-t)\cdot\left[A_1+cA_2-2A_2\cdot p(t)+A_3\cdot p'(t)\right] \tag{3.5}$$

由(3.5)式，可得在時點 t 之最佳價格函數 $p^*(t)$ 爲

$$p^*(t)=\frac{(A_1+cA_2)\cdot\theta(T-t)+cA_3\cdot\dfrac{d}{dt}\theta(T-t)}{A_3\cdot\dfrac{d}{dt}\theta(T-t)+2A_2\cdot\theta(T-t)} \tag{3.6}$$

其次，對於(3.6)式，我們發現最佳解 $p^*(t)$ 依顧客願意等待取貨的比率函數 θ 之型態而定。在此，我們將分別考慮比率函數 θ 爲等待取貨之時間長度 $T-t$ 的指數函數型態及線性函數型態兩種來加以探討，如下面之**情況Ⅰ**與**情況Ⅱ**。

情況Ⅰ：

由(2.3)式，假設顧客願意訂購該商品的比率函數 θ 爲其等待取貨之時間長度 $T-t$ 的指數函數型態時，即

$$\theta(T-t)=e^{-\lambda\cdot(T-t)},\ \ \forall\ 0\le t\le T \tag{3.7}$$

其中 λ 爲一個常數， $\lambda>0$ 表示潛在顧客願意延遲取貨的忍耐度（ λ 值愈大，表示其忍耐度愈低）。則由(3.6)式，可得 $p^*(t)$ 爲

$$p^*(t)=c+\frac{A_1-cA_2}{2A_2+\lambda A_3}\ \ ,\ \forall\ 0\le t\le T \tag{3.8}$$

由(3.8)式知，最佳價格函數 $p^*(t)$ 是一個與顧客訂購商品之時點 t 無關的常數，且亦與供貨時點 T 無關。此時，在任一時點 t 之最佳單位利潤皆爲常數 $\dfrac{(A_1-cA_2)}{2A_2+\lambda A_3}$ 。

將(3.8)式代入(2.2)式，得在最佳價格控制下之時點 t 的最佳潛在需求率函數爲

$$D(p^*(t), p^*{}'(t)) = \frac{(A_1 - cA_2)\cdot(A_2 + \lambda A_3)}{2A_2 + \lambda A_3} \tag{3.9}$$

此時，再依最佳價格控制下之最佳潛在需求率函數，得最佳總訂購數量爲

$$Q^* = \int_0^T e^{-\lambda\cdot(T-t)} \cdot D(p^*(t), p^*{}'(t))\, dt$$

$$= \frac{(A_1 - cA_2)\cdot(A_2 + \lambda A_3)}{2A_2 + \lambda A_3} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \right) \tag{3.10}$$

情況 II：

由(2.3)式，假設顧客願意訂購該商品的比率函數θ爲其等待取貨之時間長度$T-t$的線性函數型態時，即

$$\theta(T-t) = (1/u)\cdot\left[u - (T-t)\right],\ \ \forall\ 0 \le t \le T \tag{3.11}$$

其中u是一個常數，爲顧客等待取貨之時間長度的上限，且$u > T$（當顧客等待取貨的時間長度超過u時，其願意等待取貨的比率爲0，即$\theta(x)=0$，$\forall\ x \ge u$）。則由(3.6)式，可得$p^*(t)$爲

$$p^*(t) = c + \frac{(A_1 - cA_2)\cdot[u-(T-t)]}{A_3 + 2A_2\cdot[u-(T-t)]}\ ,\ \forall\ 0 \le t \le T \tag{3.12}$$

由(3.12)式對t微分，可得

$$p^*{}'(t) = \frac{A_3\cdot(A_1 - cA_2)}{\left[A_3 + 2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2} \tag{3.13}$$

由(3.13)式知，最佳價格函數$p^*(t)$爲顧客訂購商品之時點t的遞增函數，且與供貨時點T有關。此時，在時點t之最佳單位利潤爲$\dfrac{(A_1 - cA_2)\cdot[u-(T-t)]}{A_3 + 2A_2\cdot[u-(T-t)]}$。

將(3.12)式及(3.13)式代入(2.2)式，得在最佳價格控制下之時點t的最佳潛在需求率函數爲

$$D(p^*(t), p^*{}'(t))$$

$$= \frac{(A_1 - cA_2)\cdot\left[2A_3^2 + 3A_2A_3\cdot[u-(T-t)] + 2A_2^2\cdot[u-(T-t)]^2\right]}{\left[A_3 + 2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2} \tag{3.14}$$

此時，再依最佳價格控制下之最佳潛在需求率函數，得最佳總訂購數量爲

$$Q^* = \int_0^T \frac{1}{u}\cdot[u-(T-t)]\cdot D(p^*(t), p^*{}'(t))\, dt$$

$$= \frac{A_1 - cA_2}{8uA_2^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} A_3^2\cdot\ln\left(\dfrac{A_3 + 2uA_2}{A_3 + 2A_2\cdot(u-T)}\right) + 2A_2T\cdot\left[A_3 + A_2\cdot(2u-T)\right] \\ -\dfrac{4A_2A_3^3T}{(A_3 + 2uA_2)\cdot\left[A_3 + 2A_2\cdot(u-T)\right]} \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

肆、 敏感度分析及管理意涵

完全預購商品的供貨特徵是：當顧客於時間區間$(0,T]$內表明其對該商品的需求意願時，完全預購商店無法立即提供顧客該所需求的商品，而是顧客必須採取事先訂購的方式處理；然後，商店再於T時點供貨。對於顧客而言，當顧客於表明對某商品的需求時無法立即取得該商品，其是否仍願意等待，是同時與在其心中對該商品之價格水準及價格變化率以及其所必須等待取貨的時間長度有關。因此，在一個競爭激烈的消費市場裡，完全預購商品之供應商店必須要有一些刺激顧客訂購商品的實質誘因，以促使顧客願意事先訂購。在本研究的模式假設中，可採用的刺激誘因爲顧客表明其對該商品的需求意願之當時點的價格水準。在潛在需求率函數爲價格水準及價格變化率之線性函數型態的假設下，最佳價格水準$p^*(t)$係依顧客願意延遲取貨的比率函數之型態而定（見(3.6)式）。當願意延遲取貨的比率函數假設爲等待時間長度的指數函數型態時（見(3.7)式），最佳價格函數$p^*(t)$是一個與顧客訂購商品之時點t無關的常數且亦與供貨時點T無關（見(3.8)式）；當願意延遲取貨的比率函數假設爲等待時間長度的線性函數型態時（見(3.11)式），最佳價格函數$p^*(t)$爲時點t的函數，且當$A_1 - cA_2 > 0$時，$p^*(t)$爲缺貨期間顧客訂購商品之時點t的遞增函數（見(3.12)與(3.13)式）。

然而，在某特定時點t之最佳價格函數$p^*(t)$，它是隨著各參數值的不同而不同（見(3.8)與(3.12)式）。在這些參數中，參數c及T爲完全預購商店內在的環境因素，其值可根據購貨或生產實務而準確估計；而A_1、A_2、A_3及λ（或u）則爲完全預購商店外在市場環境的因素，它們是依顧客對該類型商品的偏好程度而定，是可以透過市場調查或根據歷史資料而得其估計值。當相關的參數值評估確定後，最佳價格函數$p^*(t)$、最佳潛在需求率函數$D(p^*(t), p^{*\prime}(t))$及最佳總訂購數量$Q^*$便可同時確定。

在本節，我們首先將分別針對顧客願意延遲取貨之比率函數爲等待時間長度的指數函數或線性函數型態時所得到的最佳解作敏感度分析，並說明其相關的管理意涵；其次，再針對在需求率函數中之參數作分析，以探討最佳價格及最佳總訂購數量。

一、 最佳解的敏感度分析

(一)、 比率函數爲指數函數型態

當比率函數假設爲等待時間長度之指數函數型態時（見(3.7)式），則它是等待取貨之時間長度$T-t$的一個凹口向上遞減函數；即該比率函數隨著$T-t$的增大，在缺貨期間之初期快速遞減而後緩慢遞減。此表示顧客對於其有所需求意願的商品，當不用等待時，就會馬上購買；但當需要等待時，就會遲疑並衡量是否購買。然而，對於願意等待取貨的顧客而言，當所須等待的時間長度稍長時，多

等待一個或少等待一個單位時間，相對而言其影響不大，這也正是顧客面對等待取貨的一般正常心態反應。因此，本研究以此型態之指數函數來描述顧客願意等待取貨的比率是相當合理的。此外，在同一個固定的時點，當λ值愈大時，該比率函數之函數值會愈小；此表示λ值愈大，顧客願意等待取貨的耐度愈低；因此，願意訂購的比率將會愈低。

此情況下，最佳價格函數$p^*(t)$是一個與顧客訂購商品之時點t無關的常數函數（見(3.8)式）。此結果說明了：在完全缺貨期間$(0,T]$內，如果顧客對商品的潛在需求率函數爲線性需求函數，且其顧客願意等待取貨的比率函數爲等待時間長度之指數函數型態時，完全預購商店爲了追求其總利潤爲最大，則其價格訂定的策略應爲「在整個預購期間之任何時點，其商品之價格水準均應維持一致」。

在完全缺貨期間$(0,T]$內某特定時點t之最佳價格函數$p^*(t)$，它是可以隨著各內外在參數c、A_1、A_2、A_3及λ之值的不同而不同，但與參數T無關。由(3.8)式，我們可得$p^*(t)$對各參數的一階及二階偏導數，如**附錄 A** 所示；且在$A_1 - cA_2 > 0$的情況下，可得$p^*(t)$對各參數的敏感度分析，結果如下表 1 所示：

表 1：最佳價格函數$p^*(t)$對各參數的敏感度分析結果

最佳價格函數 \ 參數		c	T	A_1	A_2	A_3	λ
$p^*(t)$	一階偏導數	＋	0	＋	－	－	－
	二階偏導數	0	0	0	＋	＋	＋

註：「＋」，表示最佳價格函數對該參數的偏導數大於 0。　「－」，表示最佳價格函數對該參數的偏導數小於 0。　「0」，表示最佳價格函數對該參數的偏導數等於 0。

由**附錄 A** 及表 1 中的結果可知，在完全缺貨期間$(0,T]$內某時點t之最佳價格函數$p^*(t)$有下列的性質（在其它參數固定不變的情況下）：

(1) $p^*(t)$與T值的大小無關。

(2) $p^*(t)$分別隨著c及A_1之值的增大而線性遞增，且其斜率分別如下：
$(A_2 + \lambda A_3)/(2A_2 + \lambda A_3)$及$1/(2A_2 + \lambda A_3)$。

(3) $p^*(t)$分別隨著A_2、A_3及λ之值的增大而凹口向上遞減。

由性質(1)可知，在總利潤最大化下之最佳價格函數的訂定策略與供貨時點無關。由性質(2)可知，最佳價格函數隨著商品之單位成本的增加而增加，且商品每增加一單位成本，其最佳價格應調高$(A_2 + \lambda A_3)/(2A_2 + \lambda A_3)$單位。由性質(3)可知，最佳價格函數隨著顧客對商品價格之預期漲價或跌價的影響程度之增加而降低。此外，當顧客願意等待取貨的忍耐度低（λ大）時，最佳價格水準的訂定應該要低，且此時之最佳潛在需求率是會增加的（因爲$\dfrac{\partial D(p^*(t), p^{*\prime}(t))}{\partial \lambda} > 0$）。

(二)、 比率函數爲線性函數型態

當比率函數假設爲等待時間長度之線性函數型態時（見(3.11)式），則它是等待取貨之時間長度$T-t$的線性遞減函數；即該比率函數隨著$T-t$的增大而遞減，其遞減的速度都一樣，且當$T-t > u$時，得其函數值$\theta(T-t) = 0$。此表示潛

在顧客對於其有需求意願的商品，當不用等待時，就會馬上購買；但當需要等待時，就會遲疑並衡量是否購買，其遞減比率在完全缺貨期間之任何時點皆相同且有一個耐度的上限值u。因此，本研究另以此型態之函數來描述顧客等待取貨的比率，仍屬合理。此外，在同一個固定的時點，當u值愈大時，該比率函數之值會愈大；此表示u值愈大，潛在顧客願意等待取貨的耐度愈高；因此，願意購買的比率將會愈高。

此情況下，最佳價格函數$p^*(t)$爲顧客訂購商品之時點t的函數（見(3.12)式）。由(3.13)式的結果可知，當$A_1-cA_2>0$時，得$p^{*\prime}(t)>0$恆成立；即最佳價格函數$p^*(t)$爲缺貨期間顧客訂購商品之時點t的遞增函數；此結果說明了：在完全缺貨期間$(0,T]$內，如果顧客對商品的潛在需求率函數爲線性需求函數，且其願意等待取貨的比率函數爲等待時間長度之線性函數時，完全預購商店爲了追求其總利潤爲最大，則其價格訂定的策略應爲「在整個預購期間，顧客愈早訂購，其商品之價格水準愈低」。更進一步地，由(3.12)式可得，完全預購商店所應採取的最低及最高價格水準分別如下：

$$p^*(0^+)=c+\frac{(A_1-cA_2)\cdot(u-T)}{A_3+2A_2\cdot(u-T)} \text{ 與 } p^*(T)=c+\frac{u\cdot(A_1-cA_2)}{A_3+2uA_2} \text{。}$$

在完全缺貨期間$(0,T]$內某特定時點t之最佳價格函數$p^*(t)$，它是可以隨著各內外在參數c、T、A_1、A_2、A_3及u之值的不同而不同。由(3.12)式，我們可得$p^*(t)$對各參數的一階及二階偏導數，如**附錄 B** 所示；且在$A_1-cA_2>0$的情況下，可得$p^*(t)$對各參數的敏感度分析，結果如下表 2 所示：

表 2：最佳價格函數$p^*(t)$對各參數的敏感度分析結果

最佳價格函數 ＼ 參數		c	T	A_1	A_2	A_3	u
$p^*(t)$	一階偏導數	＋	－	＋	－	－	＋
	二階偏導數	0	－	0	＋	＋	－

註：「＋」，表示最佳價格函數對該參數的偏導數大於 0。　「－」，表示最佳價格函數對該參數的偏導數小於 0。　「0」，表示最佳價格函數對該參數的偏導數等於 0。

由**附錄 B** 及表 2 中的結果可知，在完全缺貨期間$(0,T]$內某時點t之最佳價格函數$p^*(t)$有下列的性質（在其它參數固定不變的情況下）：

(1) $p^*(t)$隨著T值的增大而凹口向下遞減。

(2) $p^*(t)$分別隨著c及A_1之值的增大而線性遞增，且其斜率分別如下：

$$\frac{A_3+A_2\cdot[u-(T-t)]}{A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]} \text{ 及 } \frac{u-(T-t)}{A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]} \text{。}$$

(3) $p^*(t)$分別隨著A_2及A_3之值的增大而凹口向上遞減。

(4) $p^*(t)$隨著u值的增大而凹口向下遞增。

由性質(1)可知，供貨時點愈長，最佳價格水準應愈低。由性質(2)可知，最

佳價格函數隨著商品之單位成本的增加而增加，且商品每增加一單位成本，其最佳價格應調高$\dfrac{A_3 + A_2 \cdot [u-(T-t)]}{A_3 + 2A_2 \cdot [u-(T-t)]}$單位。由性質(3)可知，最佳價格函數隨著顧客對商品價格之預期漲價或跌價的影響程度之增加而降低。由性質(4)可知，當顧客願意等待取貨的忍耐度高（u大）時，價格水準的訂定應該要高，但此時之最佳潛在需求率是會減小的（因為 $\dfrac{\partial D(p^*(t), p^{*}{}'(t))}{\partial u} < 0$）。

二、 需求率函數的參數分析

在本研究中，完全預購商店之決策者對於在時點t之價格函數的訂定策略是基於顧客對商品的潛在需求率函數及願意等待取貨的比率函數。在此，我們假設在時點t顧客對商品的潛在需求率函數是當時點之價格水準與價格變化率的線性函數（見(2.2)式）；其中A_1為需求上限（即A_1表示價格水準為 0 時的需求率），A_2表示價格水準對需求的影響率，A_3表示價格變化率對需求的影響率。這三個參數之值的大小是依顧客對該商品之偏好程度而定，它們影響著需求曲線，進而影響價格水準及需求量。在此，我們將分別針對A_2或A_3之值很小的情況下，分析討論最佳價格函數及最佳總訂購數量。

(1) 當$A_2 \to 0^+$時：

顧客在時點t對商品的潛在需求率幾乎僅受當時點之價格變化率的影響，而幾乎不受價格水準的影響；此時之潛在需求率函數可視為$A_1 + A_3 p'(t)$。首先，當比率函數θ假設為等待時間長度之指數函數型態時，由(3.8)式可得最佳價格函數為

$$p^*(t) = c + (1/\lambda) \cdot (A_1/A_3) \tag{4.1}$$

其中$-(A_1/A_3)$表需求率為 0 時的價格變化率；即最佳價格函數是一個與顧客訂購商品之時點t無關的常數。此時由(3.10)式可得最佳總訂購數量為

$Q^* = A_1 \cdot (1-e^{-\lambda T})/\lambda$。

其次，當比率函數θ假設為等待時間長度之線性函數型態時，由(3.12)式可得最佳價格函數為

$$p^*(t) = c + (A_1/A_3) \cdot [u-(T-t)] \tag{4.2}$$

它是顧客訂購商品之時點t的遞增函數。此時由(3.15)式可得最佳總訂購數量為

$Q^* = (A_1 T/u) \cdot (2u - T)$。

很明顯地，此情況之最佳總訂購數量Q^*，兩者均不受A_3的影響。

(2) 當$A_3 \to 0^+$時：

顧客在時點t對商品的潛在需求率幾乎僅受當時點之價格水準的影響，而幾乎不受價格變化率的影響。此時之潛在需求率函數可視為$A_1 - A_2 p(t)$。由(3.6)式可知，不管比率函數θ為何種型態的函數，得最佳價格函數恒為

$$p^*(t) = (1/2) \cdot \left(c + A_1/A_2\right) \tag{4.3}$$

其中A_1/A_2表需求率為 0 時的價格水準（即最高價格），即最佳價格函數恒為商

品之單位成本與單位最高售價的平均；且它是一個與顧客訂購商品之時點t無關的常數。而最佳總訂購量仍會因比率函數θ的型態不同而異；首先，當比率函數θ假設爲等待時間長度之指數函數型態時，由(3.10)式可得最佳總訂購數量爲

$Q^* = (A_1 - cA_2)\cdot(1-e^{-\lambda T})\big/2\lambda$ 。

其次，當比率函數θ假設爲等待時間長度之線性函數型態時，由(3.15)式可得最佳總訂購數量爲

$Q^* = (A_1 - cA_2)\cdot(2uT - T^2)\big/4u$ 。

綜合上面的分析結果可知，當在潛在需求率函數中將價格變化率的影響因素排除時（即令$A_3 = 0$），最佳價格函數的訂定與顧客等待取貨之比率函數型態無關，它恒爲「商品之單位成本與單位最高售價之和的一半」，且它是一個與顧客訂購商品之時點t無關的常數（見(4.3)式）。當在潛在需求率函數中將價格水準的影響因素排除時（即令$A_2 = 0$），則最佳價格函數的訂定應視顧客等待取貨之比率函數的型態而定，它可能是一個與顧客訂購商品之時點t無關的常數（見(4.1)式）或爲顧客訂購商品之時點t的遞增函數（見(4.2)式）。

伍、 結論

由於完全預購商品的特徵之一爲：顧客訂購商品之時點先於取得該商品甚多。因此，面對完全預購商品之潛在顧客在決定其是否預購商品時，往往會受到該商品之預期漲價或跌價之心理因素的影響。因此，本研究假設顧客對於完全預購商品在某時點的潛在需求率，是一個同時受當時點之價格水準及價格變化率之影響的需求率函數，且顧客對於取得該商品前之等待意願是一個與等待取貨之時間長度有關的比率函數。在這些的假設下，本研究製作了一個可以決定完全預購商品供貨之最佳價格函數的數學模式，由此模式中並提供了完全預購商品供貨的最佳價格函數。

在需求率函數爲價格水準及價格變化率的線性函數之假設下，最佳價格函數的訂定與顧客願意等待取貨的比率函數之型態有關（見(3.6)式）。本研究的結果顯示，當顧客願意等待取貨的比率函數假設爲等待時間長度之指數函數型態時，最佳價格函數是一個與顧客訂購商品之時點無關的常數，惟它仍受顧客等待取貨的耐度及對商品價格預期漲價或跌價之程度的影響（見(3.8)式）。此結果說明了：在完全缺貨期間，完全預購商店爲了使得總利潤爲最大，必須消除顧客對預購商品之預期漲價或跌價的心理。當顧客願意等待取貨的比率函數假設爲等待時間長度之線性函數型態時，最佳價格函數是顧客訂購商品之時點的遞增函數，且亦受顧客等待取貨的耐度及對商品價格預期漲價或跌價之程度的影響（見(3.12)式及(3.13)式）。此結果說明了：在完全缺貨期間，完全預購商店爲了使得總利潤爲最大，其所訂定的最佳價格函數具有離供貨時點愈近價格水準愈高的特徵。此種特

徵提供了：對於較早訂購商品的顧客，預購商店應提供實質價格優惠的理論依據，這也驗證了許多實務上的預購商品之預購實質價格優惠的策略是合理的結論。

由需求率函數的參數分析中，如果顧客對於完全預購商品之預期漲價或跌價的心理對需求的影響程度很微小時，則最佳價格函數的訂定幾乎不受顧客願意等待取貨的比率函數之型態的影響，它恒爲「商品之單位成本與單位最高售價之和的一半」，且它是一個與顧客訂購商品之時點無關的常數函數（見(4.3)式）。此外，如果價格水準對需求的影響程度很微小時，則最佳價格函數的訂定仍受顧客願意等待取貨的比率函數之型態的影響（見(4.1)及(4.2)式）。

本研究的結果對於一個完全預購商店之決策團隊成員，提供了一種最佳訂價、行銷及銷售實務的策略方針，如下：

(1) 經評估後，如果顧客願意等待取貨的比率函數爲等待時間長度之指數函數型態時，則價格水準訂定的策略應採取「在整個預購期間，其商品的價格水準均應維持一致」。此結果對於商品的行銷策略決策者，是無法提供給顧客在價格方面實質的優惠促銷策略，此時可以考慮改以其它的促銷活動；這說明了許多實務上預購商品的促銷活動並非施以實質價格優惠的策略，而是以其它方式處理的原因（然而，其所應採取的優惠方式及優惠時點的決定，仍值得深思研究）。對於銷售實務人員，預購商品的價格水準在任何時點均爲一致，只要依據所評估的參數值代入(3.8)式，便可得該固定的預購價格，不會造成困擾。

(2) 經評估後，如果顧客願意等待取貨的比率函數爲等待時間長度之線性函數型態時，則價格水準訂定的策略應採取「在整個預購期間，顧客愈早訂購，其商品之價格水準愈便宜」。此結果對於商品的行銷策略決策者，是可以提供給顧客在價格方面實質的優惠促銷策略。有些實務上之預購商品的預購優惠方式，是符合此種現象的；惟當預購商採取二分法的方式處理時，是有優惠時點切割的缺點；若能採取此種連續函數的價格型式，將更爲理想。對於銷售實務人員，預購商品的價格水準在不同時點是不一樣的；因此，可將價格函數製作成電腦程式，再將所評估而得的參數值代入(3.12)式，當顧客進來表明需求意願並訂購商品時，便可立即告知當時點的價格水準，不會造成困擾。

在本研究所得到的最佳價格函數之型態中，尚含有許多相關的參數。在實務應用方面，一旦相關的內外在參數資訊評估確定後，決策者便可依據所評估而得的參數值而決定應行採取的比率函數型態，進而依(3.8)式或(3.12)式決定出最佳的價格函數；再依(3.9)式或(3.14)式得各時點之最佳需求率函數；並利用(3.10)式或(3.15)式得最佳總訂購數量。這些結果都是本模式可進一步應用於存貨實務或行銷決策的地方。

總之，本研究提供一個完全預購商店之決策團隊成員的共生決策模式。當價格函數型態確定後，行銷策略決策者便可藉由所制定出的不同價格函數型態，訂

定出實質價格優惠或其它方式優惠的不同行銷促銷策略。對於供貨策略決策者，在最佳價格控制下，可藉由評估所得的最佳總訂購數量去從事預先的批量或生產準備活動，以便能在供貨時點準時供貨，達到預期的數量控制與供貨目標。對於接受預購的門市人員，依據決策者們所訂定的策略，當顧客進來表明其需求意願且訂購商品時，便可立即告知其商品之價格水準及相關的優惠措施，不會造成困擾。

陸、 參考文獻

Caine G. J. and Plaut R. H. (1976), Optimal inventory policy when stockouts alter demand, *Nav. Res. Log. Quarterly*, *Vol. 23*, pp. 1-13.

Maxwell W. L. and Muckstadt J. A. (1985), Establishing consistent and realistic reorder intervals in production distribution systems, *Operations Research, Vol. 33*, pp. 1316-1341.

Montgomery D. C., Bazaraa M. S. and Keswani A. K. (1973), Inventory models with a mixture of backorders and lost sales, *Nav. Res. Log. Quarterly, Vol. 20*, pp. 255-263.

Silver E. A. (July-Aug. 1981), Operations Research in inventory management: A review and critique, *Operations Research, Vol. 29*, No. 4, pp. 628-645.

Tinarelli G. U. (1983), Inventory control: Models and problems, European Journal of *Operations Research*, *Vol. 14*, pp.1-12.

Kamien M. I., and N. L. Schwartz (1991), Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Elsevier North Holland.

Chen M. S. and Wu J. S. (1995), The best opportunity and quantity of complete pre-ordered merchandise supply, *Journal of Information & Optimization Sciences*, *Vol. 16*, No. 2, pp. 287-293.

Chen M. S. and Chen C. B. (1998), The study of dynamic demand function and continuous optimal price control model, *Indian Journal of Economics*, *Vol. 79*, No. 312, pp.65-80.

Chen M. S. and Chen C. B. (1999), The optimal penetration pricing strategy model under the dynamic demand function, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, *Vol. 16*, No. 2, pp. 139-154.

柒、 附錄

附錄 A： $p^*(t)$ 對各參數的偏導數（當比率函數假設爲指數函數時）

決策函數	參數	一階偏導數	二階偏導數
$p^*(t)$	c	$\frac{A_2+\lambda A_3}{2A_2+\lambda A_3}$	0
	T	0	0
	A_1	$\frac{1}{2A_2+\lambda A_3}$	0
	A_2	$-\frac{c\lambda A_3+2A_1}{\left[2A_2+\lambda A_3\right]^2}$	$\frac{4(c\lambda A_3+2A_1)}{\left[2A_2+\lambda A_3\right]^3}$
	A_3	$-\frac{\lambda\cdot(A_1-cA_2)}{\left[2A_2+\lambda A_3\right]^2}$	$\frac{2\lambda^2\cdot(A_1-cA_2)}{\left[2A_2+\lambda A_3\right]^3}$
	λ	$-\frac{A_3\cdot(A_1-cA_2)}{\left[2A_2+\lambda A_3\right]^2}$	$\frac{2A_3^2\cdot(A_1-cA_2)}{\left[2A_2+\lambda A_3\right]^2}$

附錄 B： $p^*(t)$ 對各參數的偏導數（當比率函數假設爲線性函數時）

決策函數	參數	一階偏導數	二階偏導數
$p^*(t)$	c	$\frac{A_3+A_2\cdot[u-(T-t)]}{A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]}$	0
	T	$\frac{-A_3\cdot(A_1-cA_2)}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$	$\frac{-4A_2A_3\cdot(A_1-cA_2)}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^3}$
	A_1	$\frac{u-(T-t)}{A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]}$	0
	A_2	$\frac{-[u-(T-t)]\cdot\left\{cA_3+2A_1\cdot[u-(T-t)]\right\}}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$	$\frac{4[u-(T-t)]^2\cdot\left\{cA_3+2A_1\cdot[u-(T-t)]\right\}}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$
	A_3	$\frac{-(A_1-cA_2)\cdot[u-(T-t)]}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$	$\frac{2(A_1-cA_2)\cdot[u-(T-t)]}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$
	u	$\frac{A_3\cdot(A_1-cA_2)}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$	$\frac{-4A_2A_3\cdot(A_1-cA_2)}{\left[A_3+2A_2\cdot[u-(T-t)]\right]^2}$

The Optimal Pricing Strategy of Complete Pre-Ordered Merchandise Supply

Fu-Chien Tsai*

Abstract

In this study, we explored the pricing strategy problem at each point in time during the stock-out period for complete pre-ordered store through the demand rate function of merchandise and the ratio function for customer willingness to wait for taking merchandise, in which the demand rate function at certain point in time during the stock-out period is a linear function both with the price level and price variability at that point in time. When customers step into a complete pre-ordered store at certain point in time during the stock-out period, they will review the merchandise and consider the demands based on the merchandise price levels and price variability at that point in time. However, after declaring the intension to purchase the merchandise, the store assistant informs that the merchandise will not be available for a period of time. At this moment, the ratio value for the customers still willing to pre-order is a ratio function of value between 0 and 1. The main part of this study is to construct a mathematical model that is concrete to discuss, and to determine the optimal price at each point in time during the stock-out period in order to maximize the total profit for the complete pre-ordered store. The findings of this study are as follows: Under the assumed condition that the potential demand rate function is a linear function of the price and price variability, the optimal price of complete pre-ordered merchandise is based on the type of ratio function. When the ratio function is assumed to be an exponential function of the length of waiting time for merchandise, the optimal price function is a constant that is irrelevant to the point in time for customer to pre-order merchandise. When the ratio function is assumed to be a linear function of the length of waiting time for merchandise, the optimal price function is an increasing function of the point in time for customer to pre-order merchandise.

Keywords: Complete stock-out, complete pre-ordered, mathematical model, demand rate function, price variability

* Instructor, Department of Business Administration, Meiho Institute of Technology